Não perca a informação equivalente que $\underline{U}$ tambem pode ser pensado como sendo o trabalho realizado pela força gravitacional quando se traz $\underline{m}$ do infinito até $\underline{r}$.

Para casos onde $M >> m$, tal que a posição de $\underline{M}$ nunca é significativamente alterada (tipo terra / corpos sobre a terra) costuma-se referir-se à $\underline{U}$ como sendo a energia potencial de $\underline{m}$. Trata-se, no entanto, de um exagero de linguagem.

Em resumo:

$U = -\dfrac{GMm}{r}$ é a energia do sistema composto por $\underline{M}$ e $m$ quando seus centros de massa estão distanciados de $\underline{r}$.

O que significa o sinal negativo?

*↳ fica como exercício entender claramente o significado do sinal.

Exercício:

a) Calcule a variação na energia potencial gravitacional da terra, relativamente ao sol, entre a posição mais distante (Afélio, $\sim 152 \times 10^6$ km) e a posição mais próxima (perihélio $\sim 147 \times 10^6$ km).

b) Pelo princípio de conservação de energia, que outro tipo de energia é gerada (ou absorvida) devido a esta variação? Explique, qualitativamente, o processo.

Dados:

Massa da terra: $5{,}27 \times 10^{24}$ kg

Massa do Sol: $1{,}99 \times 10^{30}$ kg

c) Utilizando um valor médio para a distância relativa terra/sol e calcule a velocidade orbital da terra. *Obs: use o sol como referencial estático.*

Solução: (a) e (b)

Com referência ao infinito a energia potencial gravitacional é dada por:

$$U = -\frac{G\,M\,m}{R^2} \quad , \quad \text{onde} \quad M = \text{Massa do sol} \ \text{e} \ m = \text{massa da terra}$$

Note que o máximo valor da energia potencial gravitacional ocorre para $R \longrightarrow \infty$. Então, à medida que $\underline{m}$ se aproxima de $\underline{M}$ a energia potencial diminui.

$\Longrightarrow$ Significa que quanto maior for a distância entre dois corpos que se atraem gravitacionalmente, maior será a energia da colisão entre eles, caso sejam liberados a se chocarem. Em outras palavras $\Rightarrow$ Quanto maior a altura que se soltar um objeto, mais forte será a pancada ao bater no chão

A diference entre as energias potenciais entre $R_{AF} = 152 \times 10^6$ km e $R_{per} = 147 \times 10^6$ km é:

$$\Delta U = U(R_{Per}) - U(R_{AF})$$

$$\Delta U = -GMm\left(\frac{1}{R_{Per}} - \frac{1}{R_{AF}}\right) \quad , \quad \text{onde} \quad G = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2}$$

$$\Delta U = -6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30} \times 5{,}27 \times 10^{24} \left(\frac{1}{147 \times 10^9} - \frac{1}{152 \times 10^9}\right)$$

$$\Delta U = -6{,}67 \times 1{,}99 \times 5{,}27 \cdot \left(\frac{1}{147} - \frac{1}{152}\right) \times \frac{10^{43}}{10^9}$$

$$\Delta U = -0{,}01565 \times 10^{34} \ \text{Joules}$$

$$\Delta U \simeq -1{,}565 \times 10^{32}\ J$$

Por que deu negativo?

$\Rightarrow$ Portanto, "caindo" da órbita $R_{AF} = 152 \times 10^6$ Km para a órbita $R_{per} = 147 \times 10^6$ Km o sistema terra/sol perde $1{,}565 \times 10^{32}$ J de energia potencial gravitacional.

Por conservação de energia esta energia deve se manifestar em outra forma. Neste caso em Energia Cinética. Se considerarmos, um referencial fixo no sol, então a velocidade do sol é zero e apenas a terra apresentará energia cinética

$\Rightarrow$ Variação da Cinética adquirida pela terra = $-$Variação da energia potencial do sistema terra/sol.

$\Rightarrow$ $\Delta E_c = -\Delta U$ ; o sinal negativo significa que se $\Delta U$ decresce, então $\Delta E_c$ cresce, e vice-versa.

$$\boxed{\Delta E_c = 1{,}565 \times 10^{32}\ J}$$

(c) O raio médio é $\langle R \rangle \simeq \dfrac{152 + 147}{2} \times 10^6$ Km

$$\langle R \rangle \simeq 149{,}5 \times 10^9\ m$$

A terra percorre uma distância $\Delta S \simeq 2\pi \langle R \rangle$ em 1 ano.

$\Rightarrow$

$$v \cong \frac{2\pi \langle R \rangle}{1\ \text{ano}}$$

1 ano = $24 \times 365$ horas

$$v \simeq \frac{2\pi \times 149{,}5 \times 10^6}{24 \times 365}\ \text{Km/h}$$

$$v \simeq 0{,}107 \times 10^6\ \text{Km/h}$$

$$\boxed{v_T \simeq 107000\ \text{Km/h}}$$

(d) Qual o ganho de velocidade devido à mudança orbital ?

$\Rightarrow$ Considerando um referencial estatico no ponto onde a órbita é maior, então o ganho de energia cinética é

$$\frac{1}{2} m v_{Per}^2 - \frac{1}{2} m v_{AF}^2 = 1{,}565 \times 10^{32} \, J$$

Neste caso, como o referencial está fixo no ponto Afélio $\Rightarrow v_{AF} = 0$.

$$\Rightarrow v_{Per}^2 = \frac{2 \times 1{,}56 \times 10^{32}}{5{,}27 \times 10^{24}} \, m/s$$

$$v_{Per} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}56}{5{,}27}} \times 10^{8/2} \, m/s$$

$$v_{Per} = 0{,}769 \times 10^{4} \, m/s$$

$$v_{Per} = 7690 \, m/s$$

$$1 \, m/s = \frac{10^{-3} \, Km}{\frac{1}{3600} \, h} = 3600 \times 10^{-3} \, Km/h = 3{,}6 \, Km/h$$

$$\Rightarrow v_{Per} \simeq 7690 \times 3{,}6 \, Km/h$$

$$\boxed{v_{Per} \simeq 27700 \, Km/h}$$

Obs: Esta não é a velocidade da terra no periélio, mas o ganho de velocidade devido a queda em direção ao sol (mudança de órbita).

Vimos acima que a energia potencial gravitacional (ou seja, sua variação) está associada com o trabalho realizado pela força interna, tal que:

$$\Delta U = - W_{int}$$

$$\Rightarrow \Delta U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Se considerarmos apenas uma pequena variação infinitesimal da energia potencial:

$$\Rightarrow \quad dU = - \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Aqui $d\vec{l}$ corresponde a um deslocamento em uma direção qualquer, não necessariamente radial.

Mas a força gravitacional é radial ; $\vec{F} = F_g \hat{r} \cdot d\vec{l}$

O produto escalar "diz" que só devemos considerar as componentes de $d\vec{l}$ que estiverem no sentido radial.

$$\hat{r} \cdot dl = d\vec{r}$$

$$\Rightarrow dU = - F_g \, dr$$

$$\Rightarrow \boxed{F_g = - \frac{dU}{dr}}$$

Portanto, a força gravitacional é uma medida da taxa de variação da energia potencial. O sinal negativo representa o fato de que o sentido da força gravitacional é inverso ao sentido de crescimento da energia potencial.

"Para a terra, a força gravitacional é para baixo enquanto que o potencial gravitacional cresce para cima".

Exercício:

Experimentalmente:

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}.$$

Obtenha $U$ utilizando a expressão $\vec{F} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$.

$$\Rightarrow \quad -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = -\frac{dU}{dr}\hat{r}$$

$$dU = \frac{GMm}{r^2}dr$$

$$\int_{U_0}^{U} dU = GMm \int^{r} \frac{1}{r^2}dr$$

$$U - U_0 = -GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Esta é a variação do potencial, entre quaisquer dois pontos $\underline{r}$ e $\underline{r_0}$.

O potencial $U_0$ é uma constante, de referência. No caso particular de definirmos $U_0 = 0$ quando $r_0 = \infty$, então

$$\boxed{U = -\frac{GMm}{r}.}$$